PART2　等比数列とその和

2　等比数列 $\{a_n\}$ において

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3,\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}=2$$

のとき，積 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}$ の値を求めよ。

Point Pickup

初項 a，公比 r の等比数列の一般項は $a_n=ar^{n-1}$

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和は

$r\neq 1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$ のとき　$S_n=na$

第 1 講　PART2　確認問題

1　等比数列 $\{a_n\}$ において

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{16}=\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{16}}=\frac{3}{2}$$

のとき，積 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{16}$ の値を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$$

PART2　等比数列とその和

2　等比数列 $\{a_n\}$ において

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3,\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}=2$$

のとき，積 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}$ の値を求めよ。

初項を a，公比を r とおくと，$a_n=ar^{n-1}$

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_{10}}=2$ より

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{ar^9}=2$$

$$r^9+r^8+r^7+\cdots\cdots+1=2ar^9$$

$$ar^9+ar^8+ar^7+\cdots\cdots+a=2a^2r^9$$

よって　$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=2a^2r^9$

$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3$ であるから　$3=2a^2r^9$　　$a^2r^9=\dfrac{3}{2}$

したがって

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}=a\cdot ar\cdot ar^2\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot ar^9$$

$$=a^{10}r^{1+2+\cdots\cdots+9}$$

$$=a^{10}r^{45}=(a^2r^9)^5$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^5=\frac{243}{32}$$

第 1 講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** アイウ：256，エオ：81

[解説]

初項を a，公比を r とおくと　$a_n = ar^{n-1}$ [A]

> [A]　初項 a，公比 r の等比数列の一般項は
> $a_n = ar^{n-1}$

$\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{a_{16}} = \dfrac{3}{2}$ より

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{ar^{15}} = \frac{3}{2}$$

$$r^{15} + r^{14} + r^{13} + \cdots\cdots + 1 = \frac{3}{2}ar^{15}$$

$$ar^{15} + ar^{14} + ar^{13} + \cdots\cdots + a = \frac{3}{2}a^2r^{15}$$

よって

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{16} = \frac{3}{2}a^2r^{15}$$

条件より，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{16} = \sqrt{3}$ であるから

$$\sqrt{3} = \frac{3}{2}a^2r^{15}$$

$$a^2r^{15} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

したがって

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{16} &= a \cdot ar \cdot ar^2 \cdot \cdots\cdots \cdot ar^{15} \\ &= a^{16} \cdot r^{1+2+\cdots\cdots+15} \\ &= a^{16} \cdot r^{120} = (a^2r^{15})^8 \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^8 = \mathbf{\frac{256}{81}} \end{aligned}$$